Проблемы физики, математики и техники, № 3 (24), 2015

ФИЗИКА

УДК 535.42+537.86

ПУЧКИ КУММЕРА БЕЗ ГАУССОВОЙ АПОДИЗАЦИИ С ПЕРЕНОСИМОЙ КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТЬЮ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

BEAMS OF KUMMER WITHOUT THE GAUSSIAN APODIZATION WITH TRANSFERABLE TERMINATING POWER

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Предложены новые решения параболического уравнения, описывающие параксиальные световые пучки. Такие пучки описываются функциями Куммера комплексного аргумента с двумя свободными параметрами без гауссиана. Установлены ограничения на эти параметры, при которых пучки Куммера переносят конечную мощность и являются физически реализуемыми.

Ключевые слова: *параксиальные пучки, пучки Куммера, квадратичная интегрируемость.*

The new solutions of the parabolic equation featuring paraxial light beams are offered. Such beams are featured by Kummer functions of complex argument with two free parameters without a Gaussian. Restrictions on these parameters, at which beams of Kummer transfer terminating power and are physically realized, are discovered.

Keywords: *paraxial beams, beams of Kummer, square integrability.*

Введение

Многие решения волнового уравнения описывают волновые поля, которые переносят бесконечную мощность через поперечное сечение перпендикулярно оси z пучка. Следовательно, такие функции не являются квадратично интегрируемыми (КИ) и поэтому характеризуемые ими волновые поля во всем пространстве являются физически нереализуемыми. Примеры: плоские волны, цилиндрические и сферические волны.

Обычно для параксиальных пучков используется аподизация соответствующей функции в форме гауссиана, чтобы функция, описывающая такой пучок, была КИ. Например, плоской волне ставится в соответствие гауссов пучок, волне Бесселя – пучок Бесселя-Гаусса.

В настоящей работе будет показано, что возможен новый тип параксиальных световых пучков (пучков Куммера), у которых гауссова аподизация отсутствует. Такие пучки описываются функциями Куммера, которые обладают квадратичной интегрируемостью при определенных ограничениях на их свободные параметры. Поэтому световые пучки Куммера физически реализуемы.

1 Пучки Куммера

Для монохроматических волн вида

$$f(r,t) = f\exp(kz - \omega t)$$

скалярное параболическое уравнение, решением которого является амплитуда f параксиального светового 2-D пучка, имеет вид [1]–[5]:

$$\left(\partial^2_{x,x} + 2i\partial_z\right) f = 0. \qquad (1.1)$$

Целесообразно далее перейти к безразмерным переменным

$$X = x / x_0,\ \ Z = z / z_0. \qquad (1.2)$$

Здесь $x_0 > 0,\ \ z_0 = kx_0^2/2$ – некоторые характерные размеры пучка в направлениях, параллельных осям OX и OZ соответственно. Теперь параболическое уравнение (1.1) можно записать в безразмерном виде:

$$\left(\partial^2_{XX} + 2i\partial_Z\right) f = 0. \qquad (1.3)$$

Для получения искомых решений выполним нелинейную замену переменного X в (1.3):

$$X_1 = \sqrt{\frac{i}{Q}}\cdot X. \qquad (1.4)$$

Вместо стандартного комплексного параметра пучка $q = z - q_0$, где z – расстояние от начала координат до точки, лежащей на оси пучка, в которой определяются характеристики волнового поля, введем комплексный безразмерный параметр пучка $Q = q / z_0$ и запишем, учитывая формулы (1.2):

$$Q = Z - Q_0,\ \text{где}\ Q_0 = Q_0' + Q_0''. \qquad (1.5)$$

Получаем дифференциальное уравнение

$$\partial^2_{X_1,X_1} f + \frac{4i}{Q} X_1 \partial_{X_1} f + 4Q\partial_\theta f = 0. \qquad (1.6)$$

Разделяя переменные, получаем [6] решениями уравнения (1.1) без гауссовой аподизации функции f^o и f^e:

$$f \equiv f^o + f^e =$$
$$= \left[A \cdot X_1 \cdot M\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{3}{2}, X_1^2\right) + \right. \qquad (1.7)$$
$$\left. + B \cdot M\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, X_1^2\right)\right] Q^{\frac{\nu}{2}}.$$

Постоянная разделения переменных ν является, в общем случае, свободным комплексным параметром: $\nu = \nu' + \nu''$. Комплексный аргумент X_1 функций $f^o(X_1)$ и $f^e(X_1)$ зависит от поперечной координаты X и комплексного параметра пучка Q: $X_1 = \sqrt{\frac{i}{Q}} \cdot X$. Функция Куммера M является конфлюэнтной гипергеометрической функцией ${}_1F_1$ [7], A и B – некоторые произвольные постоянные. Индексы *o* и *e* помечают соответственно четность (*even*) и нечетность (*odd*) функций f^e и f^o относительно изменения знака аргумента X_1.

Пучки, описываемые функциями $f^o(X_1)$ и $f^e(X_1)$, будем называть пучками Куммера. Функции (1.7) зависят от двух произвольных комплексных параметров Q и ν. Подчеркнем, что, в соответствии с (1.7), для произвольного набора комплексных параметров (Q_0, ν) всегда существуют два независимых решения f^e и f^o – четное и нечетное относительно изменения знака переменной X.

Заметим, что трехмерные скалярные решения для пучков Куммера можно построить как произведения 2-D решений типа (1.7):

$$f(X,Y,Z) = f(X, Q_X, \nu_X) \cdot f(Y, Q_Y, \nu_Y). \quad (1.8)$$

При этом возможна любая комбинация четностей. Поэтому, в общем случае, амплитуда 3-D скалярного пучка Куммера зависит от трех координат и четырех свободных комплексных параметров.

2 Условия физической реализуемости пучков Куммера

Наибольший практический интерес представляют физически реализуемые пучки конечной мощности [1], [2]. Амплитуда такого пучка должна быть ограниченной при всех X. Более того, при $X \to \pm\infty$ амплитуда f должна стремиться к нулю и быть квадратично интегрируемой, т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 \, dX_1$ должен сходиться. Чтобы гауссов пучок был физически реализуем, как отмечалось выше, достаточно одного простого ограничения: $Q_0'' > 0$.

Проведем анализ условий КИ для пучков Куммера. Для этого исследуем асимптотический предел функций f при $f \to \infty$. Асимптотическое поведение конфлюэнтной гипергеометрической функции ${}_1F_1(a,b,\Phi)$ при $|\Phi| \to \infty$ описывается формулой [7]

$${}_1F_1(a,b,\Phi) = \frac{\exp(-i\pi a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \Phi^{-a} +$$
$$+ \frac{\exp(\Phi) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a)} \Phi^{a-b}, \qquad (2.1)$$

где Γ – гамма-функция и $a \neq 0, -1, -3, \ldots.$ Учитывая (2.1) применительно к (1.7), получим условия КИ для пучков, соответствующие различным частным ситуациям, рассмотренным ниже.

Можно убедиться, что условия физической реализуемости, т. е. КИ для четных и нечетных мод Куммера одинаковы, поэтому далее индексы *o* и *e* при f опускаем. Можно показать также, что необходимое условие КИ пучков Куммера – $Q_0'' > 0$. Дальнейшие дополнительные ограничения зависят только от вещественной части ν' комплексного параметра $\nu = \nu' + \nu''$.

Если $\nu' < -\frac{1}{2}$, то пучок является КИ.

Если $\nu' \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$, то $|f| \to 0$ при $|x| \to \infty$, но пучок – не КИ.

Если $\nu' = 0$, то $|f| \to const \neq 0$ при $|x| \to \infty$ и пучок – не КИ.

Если $\nu' > 0$, то $|f| \to \infty$ при $|x| \to \infty$ и пучок – не КИ.

Для 3-D пучков Куммера условия КИ в плоскостях *XZ* и *YZ* аналогичны.

Принципиальным моментом, отличающим пучки Куммера от обычных пучков, является отсутствие гауссовой аподизации для обеспечения переносимой конечной мощности. Во всех случаях мнимая часть ν'' комплексного параметра $\nu = \nu' + \nu''$ не влияет на КИ. Все найденные выше условия КИ для функций, используемых при описании пучков Куммера, подтверждаются также при графическом моделировании их свойств.

Существенно, что пучки Куммера являются структурно устойчивыми, поскольку условия КИ, как можно проверить, не зависят от их децентровки.

Как известно, пучки Гаусса и стандартные пучки Эрмита – Гаусса пучки распространяются в свободном пространстве, сохраняя свою форму. Остальные пучки Куммера – Гаусса [4]–[6], [8] в процессе распространения изменяют свой поперечный профиль. Поэтому их можно назвать пучками с изменяющейся геометрией профиля. К их числу относятся и пучки Куммера.

Заключение

В данной работе представлены новые решения скалярного параболического уравнения для параксиальных 2-D световых пучков. Такие пучки описываются функциями Куммера комплексного аргумента с двумя свободными параметрами без гауссовой аподизации.

Установлено, что каждому набору двух свободных комплексных параметров (Q_0, v) всегда соответствуют два типа световых пучков – описываемых четными (f^e) и нечетными (f^o) функциями аргумента *X*. Фазовая и амплитудная поверхности пучков даже при распространении в свободном пространстве непрерывно трансформируются. Поэтому пучки Куммера являются пучками с изменяющейся геометрией.

Найдены ограничения на параметры, при соблюдении которых полученные решения соответствуют параксиальным пучкам с конечной энергией, то есть физически реализуемым. При этом не требуется гауссовой аподизации функций Куммера. Установлено также, что условия физической реализуемости для пучков Куммера, описываемых чётными и нечётными функциями, одинаковы.

Установлено также, что пучки Куммера являются структурно устойчивыми, поскольку условия КИ не зависят от их децентровки.

Отмечено, что выражения, полученные для описания 2-D пучков Куммера, легко обобщаются в формулы, соответствующие 3-D пучкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьев*, *Ю.А*. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – М.: Наука, 1990. – 264 с.

2. *Гончаренко*, *А.М*. Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн.: Наука и техника, 1977. – 142 с.

3. *Гиргель*, *С.С*. Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные пучки / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.

4. *Гиргель*, *С.С*. Физические свойства скалярных 2D пучков Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 19–23.

5. *Bandres*, *M.A*. Cartesian beams / M.A. Bandres and J. C. Gutierres-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 23. – P. 3459–3461.

6. *Гиргель*, *С.С*. Пучки Куммера с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Материалы научного семинара по оптике и теоретической физике, посвященный 70-летию со дня рождения А.Н. Сердюкова. – Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, 2014. – С. 8–12.

7. *Флюгге*, *З*. Задачи по квантовой механике. Т. 2 / З. Флюгге. – М.: Мир, 1974. – 418 с.

8. *Гиргель*, С.С. Скалярные астигматические 3D световые пучки Куммера – Гаусса / С. С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 19–23.

Поступила в редакцию 08.06.15.